自旋挠性航天器非约束模态动力学特性研究

朱尊红,戈新生

(北京信息科技大学机电工程学院,100089 北京)

摘　要: 在研究挠性航天器动力学问题时,关注的问题是挠性航天器系统的刚柔耦合作用问题,即航天器挠性附件的振动可能会造成航天器运动失稳。针对中心刚体-双侧大挠性结构的自旋航天器,提出了航天器帆板结构的梁式简化模型,建立了一种非约束模态动力学模型。本研究考虑受到万有引力作用,探讨自旋挠性航天器非约束模态的动力学建模及动态特性。首先利用欧拉方程和哈密顿原理建立了自旋挠性航天器动力学方程,方程解释了刚性模态和弹性模态之间的耦合;然后进行了模态离散化,分别在约束模态和非约束模态下对特征值问题开展研究,对频率和相关振型进行了定量比较;最后进行了数值仿真,求解了自旋挠性航天器非约束模态特征值问题,比较约束模态与非约束模态之间的差异,并用有限元进行验证,得到了随着梁长度的增加,即刚柔惯量比、质量比的减小,非约束模态比约束模态更加准确的结论。

关键词: 非约束模态;自旋挠性航天器;动力学建模;特征值问题

中图分类号: V19　　**文献标志码:** A

Characterization of unconstrained modal dynamics of a spinning flexible spacecraft

ZHU Zunhong, GE Xinsheng

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, 100089 Beijing, China)

Abstract: In the study of dynamic problems of flexible spacecraft, the problem of rigid and flexible coupling of flexible spacecraft system is concerned, that is, the vibration of flexible appendage of spacecraft may cause instability of spacecraft motion. A beam simplified model of the spacecraft panel structure is proposed for a spinning flexible spacecraft with a central rigid body and bilateral large flexible structure and an unconstrained modal dynamics model is established. In this paper, the unconstrained modal dynamics modeling and characteristics of a spinning flexible spacecraft are discussed considering the action of universal gravitation. Firstly, the dynamic equation of the spinning flexible spacecraft is established by using Euler equation and Hamiltonian principle, which explains the coupling between rigid and elastic modes. Then the modal discretization is carried out, the eigenvalue problems of the constrained mode and unconstrained mode are discussed respectively, and the frequency and relevant modes of vibration are quantitatively compared. Finally, numerical simulation is carried out to solve the unconstrained mode eigenvalue

收稿日期: 2021-01-09　　**修回日期:** 2021-05-21
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(No. 11732005)
通信作者: 戈新生,教授,博士生导师。E-mail:1004425488@qq.com
引用格式: 朱尊红,戈新生. 自旋挠性航天器非约束模态动力学特性研究[J]. 应用力学学报,2023,40(1):66-72.
ZHU Zunhong, GE Xinsheng. Characterization of unconstrained modal dynamics of a spinning flexible spacecraft[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(1):66-72.

problem of the spinning flexible spacecraft. The differences between the constrained mode and the unconstrained mode are compared and verified with the finite element method. The conclusion is that with the increase of the length of the beam, that is, with the decrease of the ratio of inertia and mass, the unconstrained mode is more accurate than the constrained mode.

Key words: unconstrained mode; spinning flexible spacecraft; dynamic modeling; eigenvalue problem

航天领域的发展使得航天器所承担的任务越来越复杂,为满足功能需求,航天器的规模也越来越大[1-2],平台的增大、需求的增多和在轨运行时间的增长使得挠性附件有增大的趋势,致使挠性附件在航天器系统中所占的比重越来越大。由于受发射重量的限制和展开结构的要求,这些结构往往具有质量轻,结构阻尼弱的特点,这样就会使航天器挠性结构的振动问题更严重。柔性附件的这些特性,加上外部扰动和柔性附件的振动,就会影响航天器姿态稳定和姿态机动(刚柔耦合特性)[3],这种新特点对传统的航天器姿态运动柔性附件振动耦合动力学提出了严峻挑战。

挠性航天器的大范围刚体运动,会激起航天器挠性结构的大幅度弹性变形运动,它们之间会相互耦合,即航天器挠性附件的振动可能会造成航天器运动失稳。在航天器挠性附件模态分析时,利用模态展开通常采用两种方法:约束模态和非约束模态[4-7]。徐小胜等[8]对关于航天器的一些物理概念进行了说明,包括柔性核、柔性耦合系数(包括航天器的平动和转动)、约束模态和非约束模态,并建立了两种模态下的运动学方程。吕旺等[9]探讨了一种挠性航天器模态计算方法,通过约束模态下的混合坐标系统方程求解航天器非约束模态。约束模态描述的是附件独立约束于主体之外,呈悬系形式时的振动,表达的是挠性附件在悬臂情况时的状态。非约束模态表达了中心刚体不固定,整个系统的无阻尼自由振动,体现的是航天器整体固有特性,更贴近现实。基于非约束模态的系统动力学模型是将刚体和附件视作为一个整体,其模态包含系统(刚体、挠性附件)的移动和旋转模态。在非约束模态下,在仅考虑航天器转动,不考虑平动的情况下,航天器运动可以分为两部分:一是航天器整体的刚体运动,此时挠性附件不变形,对应第一阶模态;二是刚体和挠性附件的小尺度振动,此时其振动是同步的,且相互耦合,对应第二阶到无穷阶模态。当挠性附件逐渐增大,在整个航天器比重较大时,其转动惯量相比于中心刚体的转动惯量会大得多,进行模态分析时如果仍然选择约束模态分析,求解固有特性,将会产生偏差[10],所以引用非约束模态方法描述大挠性航天器的变形振动。袁秋帆等[11]对于大挠性航天器,采用全局模态求解模态频率与振型,并与约束模态进行了对比。HABLANI[12]选取了一个以刚体为中心的二维空间结构作为研究对象,比较了约束模态和非约束模态得到的离散模型的精度,详细研究了刚体和挠性体之间的相互作用对其惯性比的依赖性,并且得出了大挠性时非约束模态描述更加准确的结论。刘延柱[13]研究了在受到万有引力的作用下,对于非轴对称中心刚体和矩形挠性板构型的航天器,探讨了姿态运动,建立了动力学方程和进行模态的离散化。LIKINS 等[14]和 VIGNERON[15]针对弹性附件的模态分析问题进行了研究,建立了各种弹性结构数学模型,针对自旋对旋转结构固有频率和振型影响的大小和特征进行了一般性的推断。HABLANI[16]采取一种连续方法,定义了一般非约束模态、旋转非约束模态和陀螺非约束模态,进行了相关的建模和模态分析。

本研究针对中心刚体-双侧大挠性结构航天器,考虑受到万有引力作用,探讨自旋挠性航天器非约束模态的动力学建模及动态特性,首先利用欧拉方程和哈密顿原理建立了自旋挠性航天器动力学方程,方程解释了刚性模态和弹性模态之间的耦合;然后进行了模态离散化,分别在约束模态和非约束模态下对特征值问题开展研究;最后进行了数值仿真,求解了自旋挠性航天器非约束模态特征值问题,探究了约束模态和非约束模态之间的差异。

1 动力学建模及方程的建立

设在圆轨道运行的自旋挠性航天器(图 1)由主刚体 R 和双侧挠性梁 ε 组成。其中 $OX_1Y_1Z_1$ 为轨道坐标系,X_1 轴指向轨道平面法线,Y_1 轴指向轨道切线,Z_1 轴指向地心。中心刚体的主轴坐标系 $OXYZ$ 为浮动坐标系。对于挠性梁的振动仅仅考虑梁的弯曲振动,不考虑其伸缩振动与扭转振动。设航天器

质心的圆轨道角速度为 ω_c；主刚体姿态角为 θ；梁弹性变形为 u；主刚体角速度相对 $OXYZ$ 上 Z 轴的分量为

$$\omega_z = \omega_c + \dot{\theta} \tag{1}$$

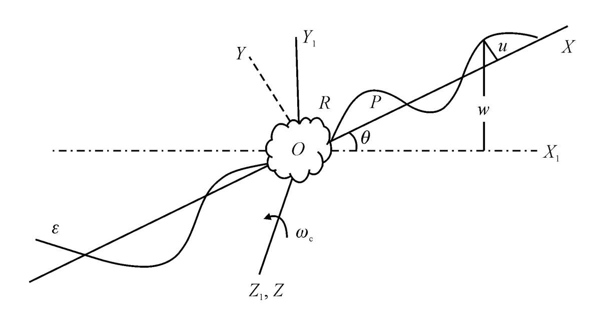


图 1　自旋挠性航天器

Fig. 1　Spin flexible spacecraft

梁任意点 P 相对 O 点的矢径 $\boldsymbol{p}$ 为变形前矢径 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 与弹性位移 $\boldsymbol{u}_e$ 之和

$$\boldsymbol{p} = \tilde{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{u}_e = x\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} \tag{2}$$

两个柔性附件正对称振动时，单轴转动航天器的姿态运动与挠性附件的弹性变形不发生耦合。因此，在建立航天器刚柔耦合动力学模型时，可以假定两柔性附件反对称变形。利用系统相对质心 O 的动量矩定理，挠性梁系统相对 O 点的欧拉方程为

$$\boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}) + 2\rho\int_{+0}^{l}\tilde{\boldsymbol{p}}\times(\ddot{\boldsymbol{u}}_e + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{u}}_e)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{M} \tag{3}$$

其中：$\boldsymbol{J}$ 为变形后系统相对 O 点的惯性张量；ρ 为梁的密度；l 为梁的长度；$\boldsymbol{M}$ 为作用于系统的万有引力对 O 点的主矩。忽略弹性变形引起系统主惯性矩 A、B、C 的附加惯性矩微小变化，所产生的惯量积对姿态运动的影响必须考虑，在 Z_1 轴上为

$$J_z = 2\rho\int_{+0}^{l} xu\,\mathrm{d}x$$

万有引力矩相对 $OX_1Y_1Z_1$ 上 Z_1 轴的投影为

$$M_z = -3\omega_c^2[(B-A)\theta + J_z] \tag{4}$$

将式(1)、式(2)、式(4)代入式(3)，导出动力学方程

$$C\ddot{\theta} + 3\omega_c^2(B-A)\theta + 2\int_{+0}^{l} x(\ddot{u} + 3\omega_c^2 u)\,\mathrm{d}m = 0 \tag{5}$$

其中：$A = A_r + A_e$，$B = B_r + B_e$，$C = C_r + C_e$ 分别是航天器绕 X、Y、Z 轴的惯性矩，A_r、B_r、C_r 是刚体绕 X、Y、Z 轴的惯性矩。

不考虑系统平动时，航天器上任意一点位移

$$w(x,t) = x\theta(t) + \begin{cases} 0, & x\in R \\ u(x,t), & x\in\varepsilon \end{cases} \tag{6}$$

刚体平台是边长为 $2r_0$ 的立方体，转动惯量为 J_r，航天器系统动能为

$$T = \frac{1}{2}J_r\dot{\theta}^2 + 2\times\frac{1}{2}\rho\int_{+0}^{l}\dot{w}^2\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

航天器弹性势能为

$$V_{弹} = 2\times\frac{E}{2}\int_{+0}^{l}\varepsilon_{xx}^2\,\mathrm{d}x \tag{8a}$$

万有引力场势能

$$V_{引} = \frac{3}{2}\omega_c^2[(B-A)\theta^2 + 2J_z\theta] \tag{8b}$$

所以航天器系统总势能为

$$V = 2\times\frac{E}{2}\int_{+0}^{l}\varepsilon_{xx}^2\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\omega_c^2[(B-A)\theta^2 + 2J_z\theta] \tag{8c}$$

其中：E 为杨氏模量；应变 ε_{xx} 与挠度的关系为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \tag{9}$$

采用欧拉-伯努利梁假设，挠性梁变形后任一点的相对位移在 X 轴方向的投影为 $v = v_0 - z\partial u/\partial x$，$v_0$ 为稳态伸展变形位移，则式(9)为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial v_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \tag{10}$$

将式(10)代入式(8c)，保留$\partial v_0/\partial x$ 和$\partial u/\partial x$ 的二阶项的乘积，忽略$\partial v_0/\partial x$ 和$\partial^2 u/\partial x^2$ 的二阶项的乘积，得

$$V = EI\int_0^l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x + Ea\int_0^l\frac{\partial v_0}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x + V_0 + \frac{3}{2}\omega_c^2[(B-A)\theta^2 + 2J_z\theta] \tag{11a}$$

其中：a 为梁截面面积；I 为梁截面惯性矩；V_0 为不包含挠度 u 的项。

令 $P(x)/a = E\partial v_0/\partial x$，则

$$V = EI\int_0^l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2\mathrm{d}x + \int_0^l P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\mathrm{d}x + V_0 + \frac{3}{2}\omega_c^2[(B-A)\theta^2 + 2J_z\theta] \tag{11b}$$

其中挠性梁惯性力

$$P(x) = \int_x^l 3\rho\omega_c^2\eta\,\mathrm{d}\eta = \frac{3}{2}\rho\omega_c^2(l^2 - x^2) \tag{11c}$$

根据哈密顿原理

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T - V)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{12}$$

得到航天器系统振动方程

$$EIu''''/\rho-\frac{\partial}{\partial x}[3\omega_c^2(l^2-x^2)u'/2]+\ddot{u}+x(\ddot{\theta}+3\omega_c^2\theta)=0 \tag{13}$$

边界条件：$x=+0:u=0,u'=0,x=l:u''=u'''=0$

其中：EI 和 ρ 分别是梁的弯曲刚度和密度；点表示对时间的微分；( )′表示 x 的偏微分。

2 模态离散化

航天器上任意一点位移模态展开为

$$w(x,t)\overset{\Delta}{=}\sum_{m=1}^{\infty}w_m(x)\eta_m(t) \tag{14}$$

其中

$$w_m(x)=x\theta_m+u_m(x) \tag{15}$$

$$\theta(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\theta_m\eta_m(t) \tag{16a}$$

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(x)\eta_m(t) \tag{16b}$$

2.1 约束模态

将式(16b)代入式(5)，再代入式(13)，各项依次乘以 u_m，对 x 积分，利用正交性条件，得

$$C\ddot{\theta}+3\omega_c^2(B-A)\theta+2\sum_{m=1}^{\infty}v_m(\ddot{\eta}+3\omega_c^2\eta_m)=0$$

$$\ddot{\eta}_m+\omega_m^2\eta_m+v_m(\ddot{\theta}+3\omega_c^2\theta)=0 \tag{17}$$

其中，$v_m=\int_{+0}^{l}xu_m(x)\mathrm{d}m$。

将式(17)写成矩阵形式

$$M\ddot{q}+Kq=0 \tag{18}$$

其中 $q=[\theta\quad \eta_1\quad \cdots\quad \eta_m]^{\mathrm{T}}$

$$M=\begin{bmatrix} C & 2v_1 & \cdots & 2v_m \\ 2v_1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2v_m & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$K=\omega_c^2\begin{bmatrix} 3(B-A) & 6v_1 & \cdots & 6v_m \\ 6v_1 & 2\omega_1^2/\omega_c^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 6v_m & 0 & \cdots & 2\omega_m^2/\omega_c^2 \end{bmatrix}$$

通过 $(K-\omega^2M)q=0$，求得频率与振型。

2.2 非约束模态

非约束模态下 $\theta\neq0$，为简便分析，将刚体 R 与附件 ε 动力学方程表达在坐标系 $OX_1Y_1Z_1$ 上，式(5)与式(13)则表达为

$$C_r\ddot{\theta}+3\omega_c^2(B_r-A_r)\theta+2\int_{+0}^{l}x(\ddot{w}+3\omega_c^2w)\mathrm{d}m=0 \tag{19}$$

$$\ddot{w}-3\omega_c^2[(l^2-x^2)w']'/2+EIw''''/\rho=0 \tag{20}$$

边界条件为

$$x=+0:w=0,w'=\theta,x=l:w''=w'''=0 \tag{21}$$

将式(14)与式(15)代入式(20)，得到特征值问题

$$EIw_m''''/\rho-3\omega_c^2[(l^2-x^2)w_m']'/2=\omega_m^2w_m \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &x=0:w_{m+}=0,\quad w_{m+}'=\theta_m \\ &x=l:w_m''=w_m'''=0 \end{aligned} \tag{23}$$

将式(14)代入式(19)，将其左侧乘以 w_n ($n=1,\cdots,\infty$)，并对 x 积分，同理，将式(22)两侧乘以 w_n ($n=1,\cdots,\infty$)，并对 x 积分，根据正交性关系[14]

$$<\tilde{w}_n,\tilde{w}_m>=\int_{\varepsilon}w_mw_n\mathrm{d}m+C_r\theta_m\theta_m=\delta_{mn},$$

$$<\tilde{w}_n,\tilde{L}w_m>=\omega_m^2\delta_{mn}$$

式中符号 < · > 表示内积。

$$\tilde{L}w_m=\begin{bmatrix}\left(EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}-\frac{3\omega_c^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial}{\partial x}\right]\right)w_m \\ C_r^{-1/2}[\theta_m\cdot3\omega_c^2(B_r-A_r)-2EIw_{m+}'']\end{bmatrix},$$

$$\tilde{w}_m=\begin{bmatrix} w_m \\ C_r^{1/2}\theta_m\end{bmatrix},\delta_{mn}=\begin{cases}1,m=n\\0,m\neq n\end{cases},$$

可导出模态离散化的动力学方程

$$C_r\ddot{\theta}+3\omega_c^2(B_r-A_r)\theta+2\sum_{m=1}^{\infty}v_m(\ddot{\eta}+3\omega_c^2\eta_m)=0 \tag{24}$$

$$\ddot{\eta}_m+\omega_m^2\eta_m=0 \tag{25}$$

式(24)中耦合系数 $v_m=\int_{+0}^{l}xw_m(x)\mathrm{d}m$。

3 非约束模态频率计算

本研究选用瑞利里兹法，用特征正交多项式簇作为基振型，设模态基振型为一端固定一端自由，挠性梁长度为1。

设多项式簇第一项基函数表示为

$$X_1(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4 \tag{26}$$

边界条件为

$$X_1(0)=X_1'(0)=X_1''(1)=X_1'''(1)=0 \tag{27}$$

将式(27)代入式(26)，得

$$X_1(x)=a_4(6x^2-4x^3+x^4) \quad (28)$$

其中，a_4 可取任意值。

对第一阶多项式函数进行模态归一化，设

$$a_4=\left(\int_0^1(6x^2-4x^3+x^4)^2\mathrm{d}x\right)^{-1/2}$$

则后续正交基可由下式得出。

$$\begin{cases} X_2=(x-B_1)X_1 \\ X_{m+1}=(x-B_m)X_m-C_mX_{m-1},m\geqslant 2 \\ B_m=\dfrac{\int_0^1 xX_m^2\mathrm{d}x}{\int_0^1 X_m^2\mathrm{d}x},C_m=\dfrac{\int_0^1 xX_{m-1}X_m\mathrm{d}x}{\int_0^1 X_{m-1}^2\mathrm{d}x} \end{cases} \quad (29)$$

每一阶正交基模态归一化，即

$$\bar{X}_m(x)=X_m/\left(\int_0^1 X_m^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \quad (30)$$

当挠性梁长度为 l 时，正交基为

$$X_{lm}(x)=\bar{X}_m(x/l) \quad (31)$$

选取第 m 阶非约束模态

$$w(x,t)=[x\theta_m+u_m(x)]\eta_m(t)$$

其中 $\eta_m(t)=\sin(\omega_m t)$。根据式（7）和式（8），得航天器第 m 阶系统动能 K_m 和航天器第 m 阶系统势能 P_m 为

$$K_m=\left(\frac{1}{2}C_r\theta_m^2+\rho\int_0^l u_m^2\mathrm{d}x+\rho\int_0^l(r_0+x)^2\theta_m^2\mathrm{d}x-2\rho\int_0^l u_m\theta_m(r_0+x)\mathrm{d}x\right)\dot{\eta}_m^2,$$

$$P_m=\left(EI\int_0^l u_m''^2\mathrm{d}x+\int_0^l P(x)u_m'^2\mathrm{d}x+\frac{3}{2}\omega_c^2(B-A)\theta_m^2-6\omega_c^2\rho\int_0^l u_m(r_0+x)\theta_m\mathrm{d}x\right)\eta_m^2 \quad (32)$$

振型 $u_m=\boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_l$，其中 $\boldsymbol{A}=[A_1,\cdots,A_N]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}_l=[X_{l1},\cdots,X_{lN}]$，$N$ 代表基振型的个数。$t=0$ 时，$\boldsymbol{K}_m$ 取得最大值 $\boldsymbol{K}_{\max}$，$t=\pi/2\omega_m$ 时，$\boldsymbol{P}_m$ 取得最大值 $\boldsymbol{P}_{\max}$。

令 $\boldsymbol{q}=[\theta_m,\boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{K}_{\max}=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{P}_{\max}=\boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}$。求取 $\boldsymbol{K}_{\max}$ 和 $\boldsymbol{P}_{\max}$ 的雅可比矩阵，得到广义刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 和广义质量矩阵 $\boldsymbol{M}$

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} C_r+C_e & 2\rho a\int_0^l(r_0+x)X_l\mathrm{d}x \\ 2\rho a\int_0^l(r_0+x)\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x & 2\rho a\int_0^l\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}X_l\mathrm{d}x \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 3\omega_c^2(B-A) & 6\omega_c^2\rho a\int_0^l(r_0+x)X_l\mathrm{d}x \\ 6\omega_c^2\rho a\int_0^l(r_0+x)\boldsymbol{X}_l^{\mathrm{T}}\mathrm{d}x & 2EI\int_0^l X_l''^{\mathrm{T}}X_l''\mathrm{d}x+2\int_0^l P(x)\boldsymbol{X}_l'^{\mathrm{T}}X_l'\mathrm{d}x \end{bmatrix} \quad (34)$$

根据挠性结构特征方程

$$(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M})\boldsymbol{q}=0 \quad (35)$$

求取非约束模态频率，第 m 个特征根即 ω_m，进而求得特征向量 $\boldsymbol{q}_m$，根据式（15），就可求得非约束模态振型。

4 仿真分析

本研究采用中心体加挠性梁模型，中心刚体是边长 0.5 m 的立方体，中心刚体材料密度 $\rho=240\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，中心刚体质量为 30 kg，惯性矩 $A_r=B_r=C_r=1.25\ \mathrm{kg\cdot m^2}$。挠性梁长度 l 分别为为 1、2 和 3 m，横截面宽为 0.16 m，高为 0.003 m，挠性梁材料密度 $\rho=2\,810\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，杨氏模量 E 为 7×10^{10} Pa，泊松比 $v=0.3$。

4.1 非约束模态频率

求得前 4 阶非约束模态频率（仅考虑反对称变形），然后通过有限元软件计算频率，并与约束模态频率进行比较，其中频率 ω 单位为 Hz。UC 为非约束模态，FEM 为有限元，C 为约束模态。

表 1 频率对比（$l=1$ m）

Tab. 1 Frequency comparison ($l=1$ m)

项目	ω_1/Hz	ω_2/Hz	ω_3/Hz	ω_4/Hz
UC	3.54	15.93	43.29	84.66
FEM	3.54	15.92	43.29	84.64
C	2.46	15.39	43.15	84.60

表 2 频率对比（$l=2$ m）

Tab. 2 Frequency comparison ($l=2$ m)

项目	ω_1/Hz	ω_2/Hz	ω_3/Hz	ω_4/Hz
UC	1.47	4.43	11.04	21.25
FEM	1.47	4.44	11.04	21.22
C	0.61	3.83	10.73	21.04

表 3 频率对比（$l=3$ m）

Tab. 3 Frequency comparison ($l=3$ m)

项目	ω_1/Hz	ω_2/Hz	ω_3/Hz	ω_4/Hz
UC	0.85	2.32	5.12	9.56
FEM	0.85	2.32	5.12	9.55
C	0.27	1.70	4.76	9.33

由上表知，非约束模态计算的频率与有限元频率接近，约束模态频率始终小于非约束模态频率。

随着梁长度的增加,即刚柔惯量比、质量比的减小,挠性附件在整体占的比重越来越大时,非约束模态频率相比于有限元差异较小,更贴近于实际情况,而约束模态频率与有限元相差较大。因此,对于小中心刚体与大挠性结构的挠性航天器构型非约束模态要更加精确。

4.2 非约束模态振型

结合离散化的非约束模态动力学方程式(24)与式(25),采用瑞利里兹法得到特征向量 $\boldsymbol{q}_m$,求出 θ_m 和 $\boldsymbol{A}_m$,根据 $u_m = \boldsymbol{A}_m^{\mathrm{T}} X_l$,得到 u_m,再根据式(15),得到非约束模态振型。

取 $l=3$ m,将得到的非约束模态振型(UC)与约束模态振型(C)比较,并用有限元(FEM)作对比,如图 2~5 所示。

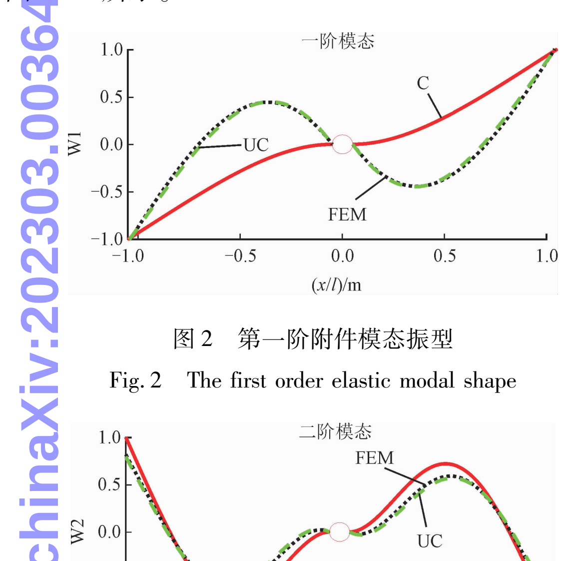


图 2 第一阶附件模态振型

Fig. 2 The first order elastic modal shape

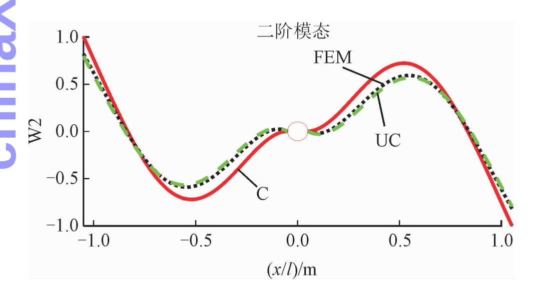


图 3 第二阶附件模态振型

Fig. 3 The second order elastic modal shape

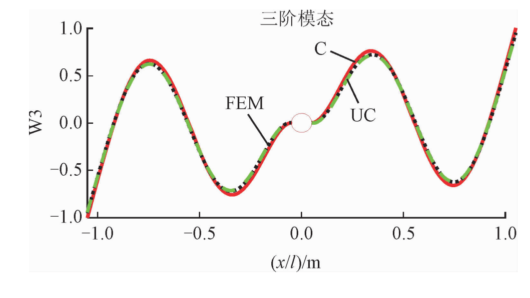


图 4 第三阶附件模态振型

Fig. 4 The third order elastic modal shape

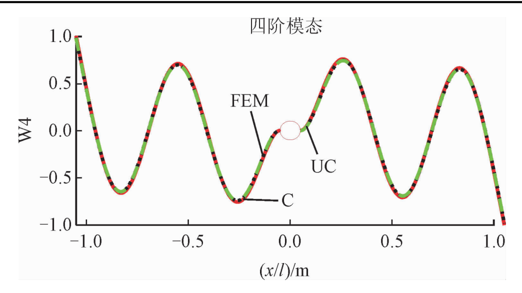


图 5 第四阶附件模态振型

Fig. 5 The fourth order elastic modal shape

当中心刚体在整体中所占的比重比较大时,约束模态振型能够准确描述实际情况。但是随着挠性附件在整体中占的比重越来越大时,非约束模态与约束模态之间差异就会比较明显,与约束模态相比,非约束模态更贴近实际情况。随着振型阶数的增大,非约束模态与约束模态振型的差异会越来越小。

5 结 论

本研究考虑受到万有引力作用,讨论了自旋挠性航天器非约束模态动力学建模及动态特性,分别在约束模态和非约束模态下对特征值问题进行了研究。结果说明当中心刚体在整体中所占比重较大时,约束模态比较贴近实际情况,但是随着挠性附件在整个航天器的比重越来越大时,约束模态就会和非约束模态出现一定的差异,此时非约束模态更贴近真实解。

参考文献:

[1] 邱吉宝,张正平,向树红,等. 结构动力学及其在航天工程中的应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2015.

[2] 曲广吉. 航天器动力学工程[M]. 北京:中国科学技术出版社,2000.

[3] 罗文. 太阳翼卫星的刚柔耦合动力学建模[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学,2015.

[4] HUGHES P C. Recent advances in the attitude dynamics of spacecraft with flexible solar arrays[J]. Canadian aeronautics and space journal,1973,19(4):165-171.

[5] HABLANI H B. Modal identities for multibody elastic spacecraft[J]. Journal of guidance,control,and dynamics,1991,14(2):294-303.

[6] HUGHES P C. Modal identities for elastic bodies,with application to vehicle dynamics and control[J]. Journal of applied mechanics,1980,47(1):177-184.

[7] HABLANI H B. Constrained and unconstrained modes-some modeling aspects of flexible spacecraft[J]. Journal of guidance,control,and dynamics,1982,5(2):164-173.

[8] 徐小胜,于登云,曲广吉. 用于惯性完备性降价的模态恒等式

研究[J]. 航天器工程,2003,12(2):23-34.
XU Xiaosheng, YU Dengyun, QU Guangji. Research on modal identities for inertial integrity reduction [J]. Spacecraft engineering, 2003,12(2):23-34(in Chinese).

[9] 吕旺,向明江,叶文郁,等. 挠性卫星在轨非约束模态计算研究[J]. 宇航学报,2014,35(4):404-409.
LÜ Wang, XIANG Mingjiang, YE Wenyu, et al. Research on calculation of on-orbit unconstrained modal of flexible satellite[J]. Journal of astronautics,2014,35(4):404-409(in Chinese).

[10] BARBIERI E, ÖZGÜNER U. Unconstrained and constrained mode expansions for a flexible slewing link[J]. Journal of dynamic systems, measurement, and control,1988,110(4):416-421.

[11] 袁秋帆,王超磊,齐乃明,等. 单翼大挠性航天器全局模态动力学建模及试验[J]. 宇航学报,2019,40(4):369-377.
YUAN Qiufan, WANG Chaolei, QI Naiming, et al. Global dynamic modeling for a spacecraft with single large flexible structure and experimental study[J]. Journal of astronautics, 2019, 40(4):369-377(in Chinese).

[12] HABLANI H B. A more accurate modeling of the effects of actuators in large space structures[J]. Acta astronautica, 1981, 8(4):361-376.

[13] 刘延柱. 万有引力场中带挠性板非轴对称航天器的姿态稳定性[J]. 固体力学学报,1994,15(4):296-302.
LIU Yanzhu. Attitude stability of an unsymmetrical spacecraft with a flexible plate in gravitational field[J]. Acta mechanica solida Sinica,1994,15(4):296-302(in Chinese).

[14] LIKINS P W, BARBERA F J, BADDELEY V. Mathematical modeling of spinning elastic bodies for modal analysis. [J]. AIAA journal,1973,11(9):1251-1258.

[15] VIGNERON F R. Comment on "mathematical modeling of spinning elastic bodies for modal analysis"[J]. AIAA journal, 1975, 13(1):126-127.

[16] HABLANI H B. Modal analysis of gyroscopic flexible spacecraft: A continuum approach[J]. Journal of guidance, control, and dynamics,1982,5(5):448-457.

（编辑　史淑英）

